

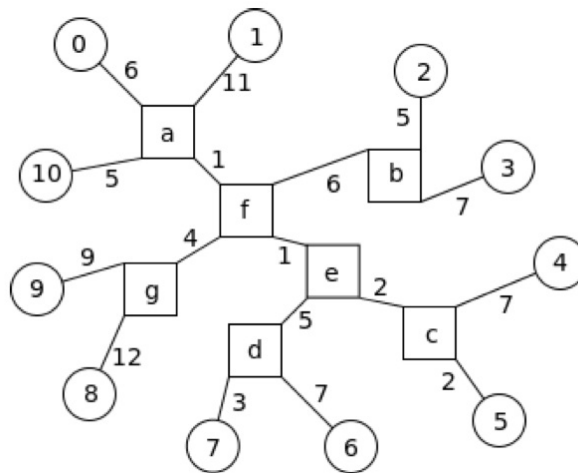
# Οικισμοί

Υπάρχουν  $N$  μικρά χωριά (small towns) στο Καζακστάν, αριθμημένα από  $0$  έως  $N - 1$ . Υπάρχει επίσης ένα άγνωστο πλήθος μεγάλων πόλεων (large cities). Τα χωριά και οι πόλεις μαζί θα ονομάζονται στη συνέχεια οικισμοί (settlements).

Όλοι οι οικισμοί του Καζακστάν είναι συνδεδεμένοι με ένα δίκτυο δρόμων διπλής κατεύθυνσης. Κάθε δρόμος συνδέει δύο διαφορετικούς οικισμούς και υπάρχει το πολύ ένας δρόμος που να συνδέει απευθείας κάθε συγκεκριμένο ζεύγος οικισμών. Για κάθε ζεύγος οικισμών  $a$  και  $b$ , υπάρχει ένας μοναδικός τρόπος για να πάει κάποιος από τον  $a$  στον  $b$  χρησιμοποιώντας το δίκτυο των δρόμων (εκτός αν χρησιμοποιήσει τον ίδιο δρόμο περισσότερες από μία φορές).

Είναι γνωστό ότι κάθε χωριό συνδέεται απευθείας με ακριβώς έναν άλλο οικισμό και επίσης ότι κάθε πόλη συνδέεται απευθείας με τρεις ή περισσότερους οικισμούς.

Το παρακάτω σχήμα δείχνει ένα δίκτυο δρόμων για  $11$  χωριά και  $7$  πόλεις. Τα χωριά παριστάνονται με κύκλους και ονομάζονται με ακέραιους αριθμούς, ενώ οι πόλεις παριστάνονται με τετράγωνα και ονομάζονται με γράμματα.



Το μήκος κάθε δρόμου είναι ένας θετικός ακέραιος αριθμός. Η απόσταση μεταξύ δύο οικισμών είναι το ελάχιστο άθροισμα των μηκών των δρόμων που μπορεί κάποιος να χρησιμοποιήσει για να πάει από τον έναν οικισμό στον άλλο.

Για κάθε πόλη  $C$  μετράμε την απόσταση  $r(C)$  προς το χωριό που είναι το πιο απομακρυσμένο από αυτήν την πόλη. Μία πόλη  $C$  είναι κέντρο (hub) αν η απόσταση  $r(C)$  είναι η ελάχιστη δυνατή μεταξύ όλων των πόλεων. Η απόσταση ανάμεσα σε ένα κέντρο και το πιο απομακρυσμένο χωριό από αυτό το κέντρο θα συμβολίζεται με  $R$ . Δηλαδή, το  $R$  είναι η μικρότερη από όλες τις αποστάσεις  $r(C)$ .

Στο παραπάνω παράδειγμα, το χωριό που είναι το πιο απομακρυσμένο από την πόλη  $a$  είναι το χωριό  $8$ , και η απόσταση μεταξύ τους είναι  $r(a) = 1 + 4 + 12 = 17$ . Για την πόλη  $g$  έχουμε

επίσης  $r(g) = 17$ . (Ένα από τα πιο απομακρυσμένα χωριά από την πόλη  $g$  είναι το χωριό  $6$ .) Το μόνο κέντρο στο παραπάνω παράδειγμα είναι η πόλη  $f$ , με  $r(f) = 16$ . Επομένως, σε αυτό το παράδειγμα, είναι  $R = 16$ .

Αν αφαιρεθεί ένα κέντρο, το δίκτυο των οικισμών χωρίζεται σε περισσότερα συνδεδεμένα τμήματα. Ένα κέντρο είναι *ισοζυγισμένο* (balanced) αν κάθε ένα από τα τμήματα που θα προκύψουν αν αφαιρεθεί περιέχει το πολύ  $\lfloor N/2 \rfloor$  χωριά. (Τονίζουμε ότι δε μετράμε τις πόλεις.) Σημειώστε ότι με  $\lfloor x \rfloor$  συμβολίζουμε το μεγαλύτερο ακέραιο αριθμό που δεν υπερβαίνει το  $x$ .

Στο παράδειγμά μας, η πόλη  $f$  είναι κέντρο. Αν την αφαιρέσουμε, το δίκτυο θα σπάσει σε τέσσερα συνδεδεμένα τμήματα, τα οποία περιέχουν τα χωριά:  $\{0, 1, 10\}$ ,  $\{2, 3\}$ ,  $\{4, 5, 6, 7\}$ , και  $\{8, 9\}$ . Κανένα από αυτά τα τμήματα δεν περιέχει πάνω από  $\lfloor 11/2 \rfloor = 5$  χωριά, επομένως η πόλη  $f$  είναι ένα ισοζυγισμένο κέντρο.

## Πρόβλημα

Αρχικά, η μόνη πληροφορία που έχετε για το δίκτυο των οικισμών και των δρόμων είναι το πλήθος  $N$  των χωριών. Δε γνωρίζετε το πλήθος των πόλεων. Επίσης, δε γνωρίζετε τίποτα για το δίκτυο των δρόμων. Μπορείτε μόνο να αποκτήσετε περισσότερες πληροφορίες κάνοντας ερωτήματα σχετικά με τις αποστάσεις μεταξύ ζευγών χωριών.

Το ζητούμενο είναι να βρείτε:

- Σε όλα τα υποπροβλήματα: την απόσταση  $R$ .
- Στα υποπροβλήματα 3 έως 6: αν υπάρχει ισοζυγισμένο κέντρο στο δίκτυο.

Πρέπει να υλοποιήσετε τη συνάρτηση `hubDistance`. Το πρόγραμμα βαθμολόγησης (grader) θα την καλέσει πολλές φορές για να αξιολογήσει πολλές περιπτώσεις ελέγχου σε κάθε εκτέλεση του προγράμματος. Το πλήθος των περιπτώσεων ελέγχου ανά εκτέλεση είναι το πολύ **40**. Για κάθε περίπτωση ελέγχου, το πρόγραμμα βαθμολόγησης θα καλέσει τη συνάρτηση `hubDistance` ακριβώς μία φορά. Βεβαιωθείτε ότι η συνάρτησή σας αρχικοποιεί όλες τις απαραίτητες μεταβλητές κάθε φορά που καλείται.

- `hubDistance(N, sub)`
  - $N$ : το πλήθος των χωριών.
  - `sub`: ο αριθμός του υποπροβλήματος (εξηγείται στην ενότητα Υποπροβλήματα).
  - Αν το `sub` είναι 1 ή 2, η συνάρτηση μπορεί να επιστρέφει είτε  $R$  είτε  $-R$ .
  - Αν το `sub` είναι μεγαλύτερο του 2, τότε η συνάρτηση πρέπει να επιστρέφει  $R$  αν υπάρχει ισοζυγισμένο κέντρο και  $-R$  αν δεν υπάρχει.

Η συνάρτηση `hubDistance` μπορεί να αποκτά πληροφορίες για το δίκτυο των δρόμων καλώντας τη συνάρτηση `getDistance(i, j)` του προγράμματος βαθμολόγησης. Η συνάρτηση αυτή επιστρέφει την απόσταση μεταξύ των χωριών  $i$  και  $j$ . Προσέξτε ότι αν τα  $i$  και  $j$  είναι ίσα, η συνάρτηση επιστρέφει **0**. Επιστρέφει επίσης **0** αν τα ορίσματα δεν είναι έγκυρα.

## Υποπροβλήματα (Subtasks)

Σε κάθε περίπτωση ελέγχου:

- Το  $N$  είναι μεταξύ **6** και **110** συμπεριλαμβανομένων.

- Η απόσταση μεταξύ οποιωνδήποτε δύο χωριών είναι μεταξύ 1 και 1,000,000 συμπεριλαμβανομένων.

Το πλήθος των ερωτημάτων που μπορεί να κάνει το πρόγραμμά σας είναι περιορισμένο. Το όριο είναι διαφορετικό για κάθε υποπρόβλημα, όπως φαίνεται στον παρακάτω πίνακα. Αν το πρόγραμμά σας υπερβεί το όριο ερωτημάτων, θα τερματιστεί και θα θεωρηθεί ότι έδωσε εσφαλμένη απάντηση.

υποπρόβλημα	βαθμοί	πλήθος ερωτημάτων	εύρεση ισοζυγισμένου κέντρου	επιπλέον περιορισμοί
1	13	$\frac{N(N-1)}{2}$	ΟΧΙ	κανείς
2	12	$\lceil \frac{7N}{2} \rceil$	ΟΧΙ	κανείς
3	13	$\frac{N(N-1)}{2}$	ΝΑΙ	κανείς
4	10	$\lceil \frac{7N}{2} \rceil$	ΝΑΙ	κάθε πόλη είναι συνδεδεμένη με ακριβώς τρεις οικισμούς
5	13	$5N$	ΝΑΙ	κανείς
6	39	$\lceil \frac{7N}{2} \rceil$	ΝΑΙ	κανείς

Σημειώστε ότι το  $\lceil x \rceil$  παριστάνει το μικρότερο ακέραιο αριθμό που είναι μεγαλύτερος ή ίσος του  $x$ .

### Υπόδειγμα βαθμολογητή (Sample grader)

Σημειώστε ότι ο αριθμός του υποπροβλήματος είναι μέρος της εισόδου. Ο βαθμολογητής αλλάζει τη συμπεριφορά του ανάλογα με τον αριθμό του υποπροβλήματος.

Ο βαθμολογητής που σας δίνεται ως υπόδειγμα διαβάζει την είσοδό του από το αρχείο `towns.in` με την εξής μορφή:

- γραμμή 1: Ο αριθμός του υποπροβλήματος και το πλήθος των περιπτώσεων ελέγχου.
- γραμμή 2:  $N_1$ , το πλήθος των χωριών στην πρώτη περίπτωση ελέγχου.
- επόμενες  $N_1$  γραμμές: Ο  $j$ -οστός αριθμός ( $1 \leq j \leq N_1$ ) της  $i$ -οστής από αυτές τις γραμμές ( $1 \leq i \leq N_1$ ) είναι η απόσταση μεταξύ των χωριών  $i - 1$  και  $j - 1$ .
- Οι επόμενες περιπτώσεις ελέγχου ακολουθούν. Έχουν την ίδια μορφή με αυτή της πρώτης περίπτωσης ελέγχου.

Για κάθε περίπτωση ελέγχου, το υπόδειγμα βαθμολογητή τυπώνει την τιμή που επιστρέφει η συνάρτηση `hubDistance` και το πλήθος των ερωτημάτων που έγιναν, σε ξεχωριστές γραμμές.

Το αρχείο εισόδου που αντιστοιχεί στο παραπάνω παράδειγμα είναι:

```
1 1
11
0 17 18 20 17 12 20 16 23 20 11
17 0 23 25 22 17 25 21 28 25 16
18 23 0 12 21 16 24 20 27 24 17
20 25 12 0 23 18 26 22 29 26 19
17 22 21 23 0 9 21 17 26 23 16
12 17 16 18 9 0 16 12 21 18 11
20 25 24 26 21 16 0 10 29 26 19
16 21 20 22 17 12 10 0 25 22 15
```

```
23 28 27 29 26 21 29 25 0 21 22
20 25 24 26 23 18 26 22 21 0 19
11 16 17 19 16 11 19 15 22 19 0
```

Αυτή η μορφή εισόδου είναι διαφορετική από το να προσδιορίζεται το σύνολο των δρόμων.  
Σημειώστε ότι επιτρέπεται να τροποποιήσετε το βαθμολογητή του υποδείγματος, έτσι ώστε να χρησιμοποιήσετε διαφορετική μορφή εισόδου.